

CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI ED EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE

Marco CAPOZZI *

* *Ingegnere Meccanico; Master in "Science in Aerospace Engineering", Mississippi State University (USA)*

INTRODUZIONE

La Fluidodinamica è la scienza che studia il comportamento dei fluidi. I fluidi, in senso ampio, sono tutte quelle sostanze nelle quali le forze intermolecolari sono tali da garantire un certo grado di moto relativo fra di esse. I fluidi possono trovarsi sia allo stato liquido che allo stato gassoso. Nel primo caso le molecole sono libere di "slittare" l'una rispetto all'altra, nel secondo, invece, le forze di coesione intermolecolari sono deboli, per cui le molecole del gas sono libere di percorrere un certo cammino. Nonostante i gas ed i liquidi appartengano alla stessa categoria, la diversa entità delle forze intermolecolari determina delle caratteristiche fisiche diverse.

Un fluido viene matematicamente idealizzato come un mezzo continuo. Questo equivale ad ammettere che le osservazioni compiute sul fluido in esame riguardino una scala sufficientemente grande da poter trascurare la natura discreta (ossia numero finito di molecole) del fluido. Più precisamente, da un punto di vista fisico, un continuo è una porzione di spazio riempita di materia in modo tale che una qualunque parte di esso, comunque piccola, è essa stessa un continuo totalmente riempito di materia. Nell'analisi dei fenomeni fluidodinamici è utile il concetto di particella di fluido. La particella di fluido è un volume infinitesimo di fluido considerato alla stregua di un punto materiale.

PRINCIPALI GRANDEZZE FISICHE

Vengono di seguito riportate le principali grandezze impiegate per descrivere fisicamente un fluido.

Densità

Si consideri un volume di fluido V in un qualunque punto P dello spazio. Esso conterrà una certa massa M di fluido. Il rapporto fra la massa ed il volume V totali di fluido contenuti in una certa regione di spazio definisce la *densità media* ρ_M . Il limite:

$$(1) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{M}{V} = \rho$$

definisce la *densità puntuale*. Nel caso di fluido omogeneo incompressibile in stato di quiete, la densità media coincide con quella puntuale. Si osservi che il limite va "arrestato" prima che il volume di fluido arrivi a contenere un numero di molecole tale da perdere il senso di continuo precedentemente introdotto. La densità è una grandezza che può variare puntualmente e nel tempo. Risulta:

$$(2) \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

essendo x, y, z le coordinate cartesiane del punto in esame, t il tempo. L'unità di misura è kg/m^3 .

Pressione

Le molecole di un fluido sono libere di percorrere cammini del tutto casuali nello spazio. Tale fenomeno è noto come moto Browniano delle molecole. Essendo il moto casuale, le molecole sono libere di scontrarsi nello spazio, in particolare possono esserci urti (elastici) fra le molecole e le pareti di un recipiente che contiene il fluido in esame. Secondo la teoria cinetica dei gas, la definizione fisica della pressione è data dal numero medio di urti molecolari per unità di area nell'unità di tempo.

Da un punto di vista pratico, la pressione è definita come forza esercitata da un fluido in quiete per unità di area di una superficie immersa in esso. Le pressioni si misurano in *Pascal*, ossia in N/m^2 .

Temperatura

Secondo la *Teoria cinetica dei gas perfetti* in un fluido in quiete la temperatura assoluta è proporzionale alla energia cinetica media delle molecole. Definita la *costante di Boltzmann* K_B , risulta:

$$(3) \quad E = \frac{3}{2} K_B T$$

essendo T la temperatura assoluta del gas. Considerata la velocità quadratica media delle molecole v^2 , e denotata con m la massa delle molecole, sussiste la seguente relazione:

$$(4) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}K_B T$$

La temperatura si misura in gradi *Kelvin* (K).

RICHIAMI DI ANALISI VETTORIALE

Per definire gli argomenti che seguiranno è necessario introdurre dei richiami di cinematica dei fluidi, la quale fornisce gli strumenti in grado di descrivere il moto dei fluidi. Le grandezze e/o gli operatori che intervengono nella descrizione cinematica di un fluido sono di tre tipi:

- scalari
- vettoriali
- tensoriali

In un campo scalare, una generica grandezza è completamente definita in un punto qualsiasi del campo in un qualunque istante di tempo da un singolo numero. In un campo vettoriale, una generica grandezza è definita da più elementi, in funzione delle dimensioni dello spazio vettoriale in cui si opera. Se le grandezze, scalari o vettoriali, sono indipendenti dal tempo, il campo si dice stazionario. I tensori sono degli operatori che per l'appunto operano su altre grandezze come, ad esempio, i vettori. Si introducono brevemente alcuni concetti di base nell'analisi del moto di un continuo necessari per poter definire matematicamente l'equazione di continuità.

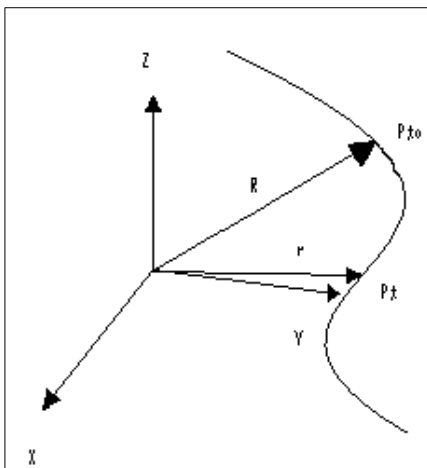


Figura 1

Sia fissato un generico riferimento nello spazio. Si consideri una particella di fluido in moto lungo una generica traiettoria (Figura 1). Considerati due istanti di tempo t_0 iniziale e t generico è possibile associare a tale particella due raggi vettore, o vettori posizione, che descrivono rispettivamente la posizione di tale particella al tempo t_0 e t . Siano essi $\mathbf{R}(X, Y, Z)$ ed $\mathbf{r}(x, y, z)$. Considerata una terna di riferimento cartesiano, il vettore \mathbf{r} è esprimibile in funzione dei versori $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ associati a tale terna:

$$(5) \quad \mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

La precedente formula può essere espressa facendo uso della notazione di Einstein in forma compatta:

$$(6) \quad \mathbf{r} = x_k\mathbf{i}_k$$

Un aspetto molto importante nell'analisi dei fluidi sono le derivate temporali di grandezze scalari, vettoriali e tensoriali che vengono di seguito introdotte. Si consideri una grandezza F (scalare, vettoriale o tensoriale) che sia funzione dello spazio e del tempo che rappresenti una generica proprietà del fluido. F può essere espressa come $F(\mathbf{R}, t)$ o $F(\mathbf{r}, t)$. La trasformazione che consente di passare da \mathbf{r} ad \mathbf{R} o da \mathbf{R} ad \mathbf{r} è detta *Jacobiano*, ed ha espressione:

$$(7) \quad J(\bar{\mathbf{R}}, t) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_i} \right)$$

Si suppone che lo Jacobiano sia sempre definito in ogni punto dello spazio e ad ogni istante di tempo. Si fa notare che le grandezze in grassetto o barrate sono vettori. Sono possibili due derivate temporali della funzione F :

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F(\bar{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} \quad \text{con } \mathbf{r} \text{ fisso}$$

$$(9) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{con } \mathbf{R} \text{ fisso}$$

La prima derivata rappresenta la variazione di F nel tempo rispetto ad un osservatore fisso, la seconda rappresenta la *derivata materiale* o *sostanziale* di F, ossia la variazione di F nel tempo vista da un osservatore che si muove con il fluido.

Le velocità ottenute derivando \mathbf{R} rispetto al tempo sono dette *velocità Lagrangiane*, quelle che utilizzino \mathbf{r} sono dette *velocità Euleriane*. Analogamente si procede per le accelerazioni. È possibile definire un legame fra le grandezze Lagrangiane e quelle Euleriane. Viene di seguito introdotto il *gradiente di un vettore* (anch'esso è un vettore per definizione):

$$(10) \quad \nabla(\) = \bar{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Considerata la espressione dell'*accelerazione Euleriana*:

$$(11) \quad \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$$

la derivata d/dt rappresenta la *derivata temporale totale*. Applicando la regola di derivazione a catena alla precedente espressione si ottiene:

$$(12) \quad \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_j}$$

o, equivalentemente:

$$(13) \quad \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_j}$$

Tenuto conto della definizione data di gradiente e tenuto conto della rappresentazione cartesiana del vettore velocità \mathbf{u} , si introduce la *derivata sostanziale Euleriana*:

$$(14) \quad \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{u}}$$

È possibile dimostrare che l'operatore gradiente, dato un vettore \mathbf{u} , gode della seguente proprietà:

$$(15) \quad (\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{u}} = (\text{grad} \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}$$

In conseguenza di ciò la derivata sostanziale D/Dt assume forma:

$$(16) \quad \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\text{grad} \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}$$

L'operatore:

$$(17) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [\text{grad}(\)] \cdot \bar{\mathbf{u}}$$

ovvero

$$(18) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad})$$

è detto *derivata sostanziale*. Si osservi che d/dt e D/Dt sono lo stesso operatore. La differenza di notazione fu introdotta da Stokes per evidenziare la necessità di distinguere i termini convettivi da quelli locali dell'accelerazione. Considerati un campo di moto di un fluido ed una linea, se la linea risulta essere tangente in ogni suo punto alla velocità del fluido, allora essa prende il nome di *linea di corrente*. Le linee di corrente sono definite in un istante di tempo t , essendo la velocità del fluido definita dal vettore posizione e dal tempo stesso. La linea percorsa da un punto materiale si chiama *traiettoria*. Se

la velocità non è funzione del tempo, si parla di moto stazionario o permanente. Si richiama ora il teorema della divergenza, anche detto *teorema di Gauss*. Considerato un vettore di velocità \mathbf{u} , esso è esprimibile, in un generico riferimento, come $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ o, alternativamente, come $\mathbf{u}(u, v, w)$. Si definisce *divergenza di un vettore* \mathbf{v} lo scalare:

$$(19) \quad \text{div} \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Dato un vettore \mathbf{v} il *teorema della divergenza* afferma che:

$$(20) \quad \iiint_V \text{div} \bar{\mathbf{v}} dV = \iint_S \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS$$

La divergenza si può essere interpretata fisicamente come il flusso di un vettore attraverso un volume unitario. Si definisce *rotazionale di un vettore* un vettore, usualmente indicato con le notazioni equivalenti:

$$(21) \quad \text{rot} \bar{\mathbf{v}} = \text{grad} \times \bar{\mathbf{v}}$$

definito come segue:

$$(22) \quad \text{rot} \bar{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bar{\mathbf{k}}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Con l'applicazione dei concetti e degli operatori precedentemente esposti è possibile determinare la equazione di continuità. Essa è una equazione basilare nell'analisi dei problemi di fluidodinamica e consente, inoltre, una prima classificazione dei fenomeni fluidodinamici in relazione alla loro maggiore o minore comprimibilità. Si consideri un volumetto di fluido all'istante t_0 . Questo avrà volume infinitesimo dV_0 pari a:

$$(23) \quad dV(t_0) = \delta X_1 \delta X_2 \delta X_3$$

essendo dX_1, dX_2, dX_3 le dimensioni del cubetto all'istante di riferimento iniziale. Ad un generico istante di tempo t il volume sarà dV . Il cambiamento di volume può essere espresso matematicamente come:

$$(24) \quad dV(t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial X_2} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial X_3} \right) dV(t_0)$$

Si ricorda che il prodotto misto di tre vettori $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ equivale all'area del parallelepipedo avente lati pari ai moduli dei tre vettori. In conseguenza di ciò è possibile scrivere:

$$(25) \quad dV(t) = J dV(t_0)$$

essendo J lo *Jacobiano* definito nell'equazione (7). Si richiamano ora la formula di Eulero, di cui si omette la dimostrazione, ed il teorema del trasporto di Reynolds. La formula di Eulero afferma che la rapidità con cui varia il Jacobiano rispetto al tempo è data da:

$$(26) \quad \frac{dJ}{dt} = J \text{div} \bar{\mathbf{u}}$$

Il teorema del trasporto di Reynolds è estremamente importante in quanto consente di trattare grandezze variabili nel tempo come se fossero fisse. Sia data una proprietà generica F del fluido riferita all'unità di volume. Sia $F = F(\mathbf{r}, t)$ la generica espressione di tale proprietà. Considerato un volume di controllo $V(t)$ variabile nel tempo, il cumulativo di tale proprietà nel volume sarà:

$$(27) \quad \int_{V(t)} F(\mathbf{r}, t) dV$$

dove $dv = dv(t)$, essendo anch'esso variabile nel tempo. La rapidità con cui questa grandezza varia nel tempo è esprimibile attraverso la derivata:

$$(28) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{r}, t) dv$$

Il problema associato all'ultimo integrale è che l'infinitesimo di integrazione dv non è fisso nel tempo, di conseguenza è impossibile calcolarlo così come appare nella (28). In virtù della (25) e (26), e svolgendo la derivata temporale, si ottiene:

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{r}, t) dv = \int_{V(t_0)} \frac{d}{dt} (FJ) dv_0$$

ossia:

$$(30) \quad \int_{V(t_0)} \frac{d}{dt} (FJ) dv_0 = \int_{V(t_0)} \left(\frac{dF}{dt} J + \frac{dJ}{dt} F \right) dv_0$$

Quindi:

$$(31) \quad \int_{V(t_0)} \left(\frac{dF}{dt} J + F(J \operatorname{div} \vec{u}) \right) dv_0 = \int_{V(t_0)} J \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \vec{u} \right) dv_0$$

ovvero, in base alla (25):

$$(32) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{r}, t) dv = \int_{V(t)} \left(\frac{DF}{Dt} + F \operatorname{div} \vec{u} \right) dv$$

La (32) esprime il *teorema del trasporto di Reynold*. È adesso possibile enunciare l'equazione di continuità. Considerato il teorema di Reynolds, se la proprietà in questione è la densità, la conservazione della massa (vedi paragrafo successivo) contenuta in un volume di fluido V porta a scrivere:

$$(33) \quad \int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} \right) dv = 0$$

La (33) è valida per qualunque volume $v(t)$, per cui è valida sempre e risulta:

$$(34) \quad \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} \right) = 0$$

La (34) è la forma differenziale della equazione di continuità. Per flussi stazionari essa prende forma:

$$(35) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

che, nelle ulteriori ipotesi semplificative di incomprimibilità del fluido (densità costante), diventa:

$$(36) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE

Si presentano ora di seguito le equazioni di conservazione della fluidodinamica. Esse sono tre:

- *conservazione della massa;*
- *conservazione della quantità di moto;*
- *conservazione dell'energia.*

Da queste tre equazioni di base se ne sviluppano altre che possono essere convenientemente utilizzate per descrivere i fenomeni fluidodinamici.

Conservazione della massa

Il principio di conservazione della massa afferma che, dato un volume di controllo V , la variazione temporale all'interno di tale volume è nulla, cioè per un fluido di densità ρ risulta:

$$(37) \quad \frac{d}{dt} \int \rho dv = 0$$

Nel paragrafo precedente si è dimostrato che la (37) equivale a:

$$(38) \quad \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dv = 0$$

ove \mathbf{u} è il vettore velocità del flusso. Il simbolo D/Dt che compare nella (38) rappresenta la *derivata sostanziale o Stokesiana* di ρ , ed ha espressione (relazioni (17) e (18)):

$$(39) \quad \frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + [\operatorname{grad}(\bullet)] \cdot \mathbf{u}$$

Essendo il volume di integrazione della (38) arbitrario, l'equazione della conservazione della massa prende forma

$$(40) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

che è proprio l'equazione (34).

Conservazione della quantità di moto

La conservazione della quantità di moto è la seconda legge della dinamica applicata ai fluidi: esso afferma che la variazione temporale della quantità di moto di un volume di fluido eguaglia la risultante delle forze di superficie e di massa applicate rispettivamente alla superficie ed al volume stesso. Se V è un volume di fluido ed S la corrispondente superficie, allora:

$$(41) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dv = \int_V \rho \mathbf{f} dv + \int_S \mathbf{t} ds$$

dove \mathbf{f} è il campo di forze volumiche agenti sull'elemento considerato, \mathbf{t} rappresenta le azioni degli sforzi viscosi sulla superficie del volume considerato. Per inciso la (41) è il punto di partenza per le *Equazioni di Navier-Stokes*, il sistema di equazioni cardine della fluidodinamica.

Conservazione dell'energia

Il principio di conservazione dell'energia è la trascrizione in forma fluidodinamica del celeberrimo principio di Lavoisier: *"Nulla si crea e nulla si distrugge, ma tutto si trasforma"*. In termini fisici, il principio afferma che la variazione nel tempo dell'energia totale contenuta in un volume di fluido V è uguale al lavoro compiuto dalle forze di massa e di superficie sommato al flusso netto di calore che attraversa la superficie del volume considerato.

L'energia interna di un fluido è legata al suo stato di agitazione molecolare. L'energia totale di un fluido è la somma di energia cinetica ed energia interna. L'espressione dell'energia totale di un fluido è data da:

$$(42) \quad e = \bar{u} + \frac{|u|^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$$

in cui la \bar{u} barrata indica l'energia intrinseca del fluido, il termine quadratico l'energia cinetica e il prodotto scalare rappresenta l'energia potenziale del campo gravitazionale (usualmente ommesso in quanto trascurabile). Se S è la superficie che racchiude il volume V di fluido, denotata con e l'energia totale per unità di massa risulta:

$$(43) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e \, dv = - \int_S \rho e (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds + \int_S \mathbf{k} \mathbf{n} \cdot \nabla T \, ds + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

La (43) esprime l'equazione di conservazione dell'energia. Per quanto concerne il flusso termico, in base alla equazione dei Fourier risulta:

$$(44) \quad \mathbf{q} = -k \nabla T$$

in cui k è il *coefficiente di conduttività termica* del fluido e T la temperatura. Esso è negativo per la convenzione secondo la quale sono negative le quantità uscenti dal sistema.