

MODELLAZIONE DELLA TURBOLENZA: APPROCCIO "RANS"

Marco CAPOZZI *

* *Ingegnere Meccanico; Master in "Science in Aerospace Engineering", Mississippi State University (USA)*

INQUADRAMENTO DEL PROBLEMA

Il moto dei fluidi è un fenomeno la cui descrizione e l'inquadramento matematico sono particolarmente complessi. La natura offre diversi spunti per osservare il moto di un fluido. Un esperimento facilmente riproducibile è il seguente: si bruci uno stecchino o una striscia di cartone in un ambiente tranquillo; il fumo da essi prodotto salirà sotto forma di una colonna di fluido che, percorso un certo tratto, si sfrangerà originando un moto caotico. Nel primo tratto il flusso è di tipo laminare, nel secondo tratto è di tipo turbolento. In realtà esiste anche una zona di estensione più o meno limitata in cui il flusso sarà di transizione, ossia né turbolento completamente sviluppato, né puramente laminare. Questo esperimento evidenzierà le differenze fra i due tipi di moto in maniera esaustiva.

Lo studio della turbolenza è la branca fra le più complesse della Fluidodinamica, oggetto tuttora di studi, ricerche e dibattiti nel mondo accademico a livello mondiale. Un flusso turbolento è caratterizzato dalla sua instabilità intrinseca, per cui attrito, perdite di pressione, rumorosità saranno più grandi rispetto al caso di un flusso laminare, da cui la necessità di approfondire le conoscenze in merito per migliorare i progetti di aerei, autovetture, navi e ponti.

I meccanismi di transizione e sviluppo della turbolenza non sono al giorno d'oggi del tutto chiari. I metodi di calcolo classicamente adottati per lo studio del moto dei fluidi, quali moti potenziali e metodo dei pannelli, non risultano essere validi nel momento in cui si approcci lo studio della turbolenza. L'unico modo per predire il comportamento di un flusso turbolento è quello di eseguire esperimenti o di lanciare simulazioni numeriche. Le tecniche sperimentali sono estremamente costose in termini di attrezzature e tempo richiesto, per cui vengono impiegate nei casi di effettiva necessità, legata, quest'ultima, sempre al costo dell'opera. L'analisi numerica presuppone la formulazione matematica di un problema, e richiede anch'essa personale adeguato e risorse computazionali notevoli. Dal punto di vista matematico, si è ben lontani dall'avere un modello universalmente valido (ed accettato). I modelli attualmente in uso sono spesso dipendenti dal tipo di problema in esame e sono sensibili al *grid* adottato nella soluzione numerica, per cui si hanno problemi di scelta di un adeguato modello di turbolenza, di convergenza degli schemi numerici, di tempi di calcolo decisamente lunghi. Tuttavia, la modellazione di flussi 3D con tecniche di simulazione della turbolenza è quotidianamente usata nei reparti di progettazione dell'industria aerospaziale, ed è entrata nel settore automobilistico, dapprima per i problemi di aerodinamica esterna, poi per problemi di flussi nei condotti dei motori.

L'analisi CFD dei problemi di turbolenza risulta essere sicuramente più economica della sperimentazione. Per alcuni problemi, come ad esempio il moto dei fluidi nei condotti di aspirazione dei motori, è l'unico mezzo per trarre informazioni quantitative sul flusso; per altri, il vantaggio economico rispetto alla sperimentazione sta crescendo sempre più. La ricerca, allo stato attuale, è orientata verso una miglior comprensione dei fenomeni relativi alla turbolenza, un inquadramento matematico più preciso ed una più rapida convergenza dei solutori.

IMODELLAZIONE DELLA TURBOLENZA

Il moto turbolento dei fluidi segue leggi casuali che possono essere inquadrate nel campo delle leggi statistiche. Un'ottima definizione di turbolenza è data da Z.U.A. Warsi:

"La forma prevalente del moto dei fluidi in natura è di tipo irregolare e caotico. Se il flusso, oltre ad essere caotico ed irregolare, ha una natura diffusiva e dissipativa, allora il flusso è detto turbolento"

Le equazioni di Navier-Stokes in forma non stazionaria possono descrivere il moto di un fluido in maniera adeguatamente precisa, ma –purtroppo- la loro soluzione diretta è di fatto impossibile stanti le attuali limitazioni di potenza di calcolo dei computer: essa richiederebbe delle discretizzazioni di domini di calcolo talmente dense da non risultare praticamente proponibili, fatti salvi alcuni casi elementari. La strategia risolutiva diretta è nota comunemente con l'acronimo *DNS (Direct Numerical Simulation)*.

La casualità del moto del fluido dovuto alla turbolenza è determinata dalla casualità con cui avvengono gli urti fra le molecole che compongono il fluido stesso. Esistono, quindi, dei fenomeni microscopici e macroscopici legati ai meccanismi di turbolenza la cui interazione è spiegabile solo attraverso un'analisi particolarmente spinta del fenomeno. Da un punto di vista pratico, però, la scala microscopica non è interessante, né tanto meno lo è, ancorché fattibile, l'approccio DNS.

Sono state di conseguenza elaborate delle teorie (*approcci*) che descrivono con sufficiente approssimazione il fenomeno della turbolenza e sono implementabili in opportuni algoritmi di calcolo:

- L'approccio *LES (Large Eddy Simulation)* è uno dei metodi correntemente impiegati per lo studio della turbolenza. In esso vengono valutate direttamente le grandezze macroscopiche della turbolenza e vengono modellati solo gli effetti dei vortici più piccoli. È stato calcolato che l'approccio LES, da un punto di vista computazionale, è circa dieci volte meno intensivo rispetto alla formulazione DNS;
- L'approccio *RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)* analizza le equazioni di Navier Stokes in cui si siano mediati i termini fluttuanti della turbolenza

L'APPROCCIO "RANS"

La modellazione RANS trae origine dalle equazioni di Navier-Stokes in cui si sostituiscono le quantità medie delle variabili e si effettua una media temporale dell'equazione così ottenuta. Data una certa quantità Q , la definizione di quantità mediata nel tempo è:

$$(1) \quad \bar{Q} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} Q dt$$

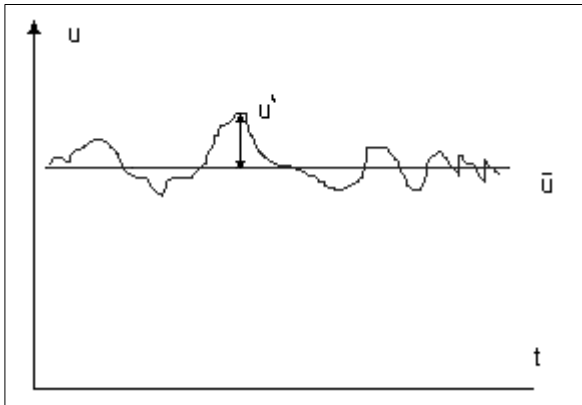


Figura 1

Applicando la (1) a grandezze di interesse fluidodinamico, si richiede che l'intervallo di tempo Δt sia sufficientemente grande rispetto alle fluttuazioni delle variabili di flusso cui la (1) viene applicata, considerando a tale scopo le fluttuazioni aventi frequenza minima. In virtù della (1) è possibile descrivere una quantità fisica Q come:

$$(2) \quad Q = \bar{Q} + Q'$$

in cui il termine apostrofato rappresenta la componente fluttuante della quantità considerata rispetto al suo valor medio (Figura 1).

Considerati i vettori velocità u, v, w , la pressione p , l'entalpia h , la temperatura T , l'entalpia totale H , è possibile scrivere:

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & v &= \bar{v} + v' & w &= \bar{w} + w' & \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ p &= \bar{p} + p' & h &= \bar{h} + h' & T &= \bar{T} + T' & H &= \bar{H} + H' \end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli. Per definizione, la media temporale di una quantità fluttuante è nulla, per cui:

$$(4) \quad \bar{Q}' \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} Q' dt = 0$$

Si riportano di seguito altre proprietà delle grandezze mediate. Date due funzioni f ed g , risulta:

$$(5) \quad \begin{aligned} \overline{fg'} &= 0 & \overline{f+g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} & \overline{f'f'} &\neq 0 \end{aligned}$$

Per lo studio dei flussi comprimibili risulta conveniente adottare le quantità normate rispetto alla massa secondo la definizione:

$$(6) \quad \underline{Q} = \frac{\overline{\rho Q}}{\bar{\rho}}$$

In base alla (6), le grandezze (3) assumono forma:

$$(7) \quad \underline{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\rho} \quad \underline{v} = \frac{\overline{\rho v}}{\rho} \quad \underline{w} = \frac{\overline{\rho w}}{\rho} \quad \underline{h} = \frac{\overline{\rho h}}{\rho} \quad \underline{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\rho} \quad \underline{H} = \frac{\overline{\rho H}}{\rho}$$

È possibile ridefinire le (3) per flussi comprimibili come:

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= \underline{u} + u'' & v &= \underline{v} + v'' & w &= \underline{w} + w'' \\ h &= \underline{h} + h'' & T &= \underline{T} + T'' & H &= \underline{H} + H'' \end{aligned}$$

FORMA DI REYNOLDS DELL'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Per ottenere la forma di Reynolds dell'equazione di continuità è sufficiente sostituire, in funzione della comprimibilità del fluido, le (3) o le (8) all'interno dell'equazione stessa. L'equazione di continuità, se \mathbf{v} ha componenti (u,v,w) , ha espressione:

$$(9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

sostituendovi le (3), ricordando le (4), (5) ed effettuando la media temporale, la (9) conduce all'equazione mediata di Reynolds. La derivata temporale della densità è immediata:

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\rho + \rho')} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}$$

per quanto concerne le derivate spaziali si ha:

$$(11) \quad \begin{aligned} \nabla(\overline{\rho \mathbf{v}}) &= \nabla \overline{[(\bar{\rho} + \rho')(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')] } \\ &= \nabla \overline{(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \mathbf{v}' + \rho' \bar{\mathbf{v}} + \rho' \mathbf{v}')} \\ &= \nabla(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla(\bar{\rho} \mathbf{v}') + \nabla(\rho' \bar{\mathbf{v}}) + \nabla(\rho' \mathbf{v}') \end{aligned}$$

Dalle (5) discende:

$$(12) \quad \nabla(\overline{\rho \mathbf{v}}) = \nabla(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla(\rho' \mathbf{v}')$$

Considerate la (9), la (10) e la (12) si perviene alla forma di Reynolds per l'equazione di continuità, avente espressione:

$$(13) \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla(\rho' \mathbf{v}') = 0$$

FORMA DI REYNOLDS DELL'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

La forma di Reynolds dell'equazione di Navier-Stokes (d'ora in poi NS) si ottiene in maniera analoga a quella dell'equazione di continuità. L'espressione dell'equazione di NS in forma canonica tensoriale in cui si siano trascurate le forze di volume è:

$$(14) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u} \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Dato che:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned}$$

sostituendo le (15) nelle (14) si ottiene:

$$(16) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \text{div}[(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')] = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p} + p') + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')$$

ossia:

$$(17) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \text{div}(\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}') + \text{div}(\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \text{div}(\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}) + \text{div}(\mathbf{u}'\mathbf{u}') = \\ -\frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p}) - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p') + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}}) + \nu \nabla^2(\mathbf{u}')$$

Adesso è possibile mediare la (17), ottenendo:

$$(18) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \text{div}(\overline{\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}'}) + \text{div}(\overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) = \\ -\frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p}) - \frac{1}{\rho} \text{grad}(\overline{p'}) + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}}) + \nu \nabla^2(\overline{\mathbf{u}'})$$

Ricordando le (4) e le (5), la (18) si riduce a:

$$(19) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) = \\ -\frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p}) + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}})$$

Riordinando la (19) si approda alla forma canonica dell'equazione di NS mediata

$$(20) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p}) + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}}) - \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'})$$

la quale, ricordando la definizione di derivata Stokesiana, può essere riscritta come:

$$(21) \quad \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p}) + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}}) - \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'})$$

In essa il primo termine rappresenta l'accelerazione media del fluido, il secondo è composto da tre parti: gradiente medio di pressione, sforzi viscosi dovuti al moto medio del fluido aventi natura simile a quelli laminari, sforzi apparenti dovuti al trasporto di quantità i moto causato dalle fluttuazioni turbolente. Gli sforzi viscosi causati dal terzo termine sono raggruppati all'interno di un tensore, detto *tensore degli sforzi di Reynolds*, avente espressione:

$$(22) \quad \mathbf{R} = -\text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'})$$

Le equazioni del metodo RANS necessitano di opportuni modelli di turbolenza per poter essere risolvibili. Tali modelli possono essere di vario ordine in funzione del numero di variabili in essi coinvolto, e sono ancora oggetto di studi e ricerche in tutto il mondo in quanto il modello definitivo, adatto a descrivere qualunque configurazione geometrica e valido per ogni numero di Reynolds, deve essere ancora determinato.