

# EQUAZIONI DELLA MAGNETOFLUIDODINAMICA (MHD)

Valerio D'ALESSANDRO \*

\* *Ingegnere Termomeccanico; Dottorato di Ricerca in "Energetica"; Gruppo di Termofluidodinamica, Università Politecnica delle Marche*

## INTRODUZIONE

La *Magnetofluidodinamica (Magneto-Hydro-Dynamic, MHD)* è la teoria che descrive la dinamica dei fluidi elettricamente conduttori, chimicamente omogenei ed inerti nella loro interazione con campi elettromagnetici esterni, ed è sviluppata nell'ambito della Teoria dei Continui.

Il problema Fluidodinamico (o Euleriano) ed il problema Elettromagnetico (o Maxwelliano) del mezzo risultano, nell'ambito della teoria della Magnetofluidodinamica, accoppiati, dando origine ad un sistema di equazioni alle derivate parziali lineari e non lineari.

La formulazione delle equazioni della dinamica di un fluido newtoniano non micropolare omogeneo monofase rimangono inalterate nell'ambito della trattazione di seguito esposta, mentre per quanto riguarda la parte elettromagnetica del problema è opportuno considerare quanto segue.

Le variazioni d'intensità del *campo elettrico E* e del *campo magnetico H* nel tempo sono determinate dalla loro distribuzione istantanea e dal movimento delle cariche negative rispetto alle positive, indipendentemente da come la variazione temporale e il moto relativo sono prodotti. Per questo le *Equazioni di Maxwell* non sono formalmente alterate dal moto del fluido. La parte elettromagnetica del problema del moto di un fluido elettricamente conduttore e della sua interazione con eventuali campi elettromagnetici esterni è totalmente trattabile con le Equazioni di Maxwell scritte in presenza di un mezzo dielettrico e nelle ipotesi di materiale diamagnetico o paramagnetico.

## PROBLEMA MAXWELLIANO

La parte elettromagnetica del problema, come già argomentato, è posta matematicamente con le classiche equazioni di Maxwell (si presuppone noto il significato dei simboli delle grandezze che vi compaiono):

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$(5) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$(6) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$(7) \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

A tali relazioni è poi utile aggiungere la *Legge di Ohm* generalizzata la quale, ovviamente, rimane valida nell'ambito di questa teoria:

$$(8) \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{u}$$

dove il termine  $\rho_e \mathbf{u}$  è la *densità di corrente di convezione*.

## PROBLEMA EULERIANO

Le equazioni che descrivono il problema fluidodinamico (o Euleriano) sono, nell'ambito della teoria qui presentata, esattamente quelle della Fluidodinamica Classica opportunamente munite dei termini relativi alle forze di massa maxwelliane e all'effetto Joule. Se  $\mathbf{F}$  è la forza di natura non elettromagnetica, riferita all'unità di massa, agente sul fluido si ha:

$$(9) \quad \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{F}_L + \rho \mathbf{F}$$

dove  $\mathbf{F}_L$  è la forza di Lorentz per unità di volume:

$$(10) \quad \mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

per cui sostituendo la (10) nella (9) si ottiene banalmente:

$$(11) \quad \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{F}$$

L'equazione dell'energia per un fluido newtoniano non micropolare classico, invece, assume la forma:

$$(12) \quad \rho \frac{De}{Dt} = k \nabla^2 T - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Phi$$

che può essere riscritta, nell'ipotesi di gas perfetto, come:

$$(13) \quad \rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Phi$$

La (13), però, in Magnetofluidodinamica va corretta in virtù dell'effetto Joule: infatti, si deve tener conto che il campo elettrico può spostare le cariche elettriche libere nel fluido spendendo una potenza meccanica (si tenga presente che la forza di Lorentz, e quindi il campo elettrico ad essa associato, non può compiere lavoro sulle cariche elettriche) espressa dalla seguente relazione:

$$(14) \quad \mathbf{w} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

la quale entra di diritto nell'equazione dell'energia (13):

$$(15) \quad \rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Non è affatto difficile ricavare l'equazione di produzione dell'entropia in presenza di effetto Joule e da tale procedimento, qui omissis, si conclude facilmente che se l'effetto Joule è presente allora produce entropia. Per completare la descrizione del problema Euleriano è necessario aggiungere:

- l'equazione di continuità della massa:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$
- l'equazione di stato dei gas perfetti (è che il modello termodinamico che si è assunto già nell'equazione dell'energia);
- una relazione  $\mu = \mu(T)$ .

Le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, che costituiscono il corpo matematico del problema euleriano della teoria della Magnetofluidodinamica, sono più complesse di quanto appaiono: sono non lineari, accoppiate e difficili da risolvere. È difficile, inoltre, dimostrare con procedure matematiche esistenti l'esistenza di una soluzione unica per particolari condizioni al contorno e la dipendenza con continuità della soluzione dalle condizioni al contorno ed iniziali.

L'esperienza mostra che le *Equazioni di Navier-Stokes* descrivono correttamente il flusso di un fluido newtoniano, e solo in particolari casi – flussi completamente sviluppati in geometrie semplici – è possibile ottenere una soluzione analitica delle equazioni stesse sia nella Fluidodinamica che nella Magnetofluidodinamica. Questi flussi sono importanti per lo studio dei fondamenti di queste discipline, ma quei casi particolari sono del tutto irrilevanti dal punto di vista applicativo.

Le 7 equazioni del problema maxwelliano più le 7 del problema euleriano costituiscono la formulazione completa del problema magnetofluidodinamico a cui, ovviamente, vanno aggiunte opportune condizioni al contorno ed iniziali.

Il problema matematico che scaturisce dall'analisi della fenomenologia fisica di interesse è, allo stato attuale della ricerca nell'ambito dell'Analisi Matematica, privo di soluzione analitica: per questo motivo risulta necessario introdurre, per determinate condizioni di flusso, delle semplificazioni nelle equazioni, in modo che alcuni termini in esse presenti diventino poco importanti o trascurabili rispetto ad altri. Nonostante questo, è possibile che anche le equazioni così semplificate siano tali da non ammettere soluzione analitica, rendendo quindi necessario per la loro risoluzione il ricorso ad approcci di tipo numerico.

## IPOTESI DI ALFVEN

L'impossibilità di poter risolvere il problema matematico alla base della Magnetofluidodinamica richiede, come detto, la necessità di introdurre nelle equazioni, per particolari condizioni di flusso, delle semplificazioni, valutando l'opportunità di trascurare o meno alcuni dei termini in esse presenti rispetto ad altri. Le *ipotesi di Alfven*, che si inquadrano pienamente in questa logica, sono le seguenti:

- In generale se non vi sono oscillazioni ad alta frequenza si ha:  $\left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right| \gg \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

Questo equivale ad imporre la trascurabilità della corrente di spostamento nei problemi di Magnetofluidodinamica.

- La corrente di convezione è trascurabile.

La prima ipotesi di Alfven è avvalorata dall'esperienza sperimentale; per quanto riguarda la seconda ipotesi si può dare una dimostrazione appropriata. A tal fine, considerando la Legge di Ohm generalizzata, si ottiene:

$$(16) \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma [\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{u})$$

e tenendo conto dell'equazione di continuità della carica elettrica si ha:

$$(17) \quad \sigma [\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{u}) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

Introducendo nella (17) le equazioni (1) e (6) si ottiene:

$$(18) \quad \sigma \left[ \frac{\rho_e}{\epsilon} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{u}) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

la quale può essere riscritta come:

$$(19) \quad \frac{D\rho_e}{Dt} = -\sigma \frac{\rho_e}{\epsilon} - \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

La (19) presenta una soluzione del tipo:

$$(20) \quad \rho_e \propto A \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right) + B$$

Nella (20) si suppone che il movimento lo si consideri a partire da un istante di tempo abbastanza lontano dall'istante di tempo assunto come istante iniziale: in questa ipotesi il peso della corrente nelle equazioni di convezione diventa del tutto trascurabile.

## EQUAZIONE DI INTERAZIONE u-H

L'equazione di interazione **u-H** si inquadra a pieno nell'obiettivo di ricerca della riduzione del numero di equazioni figuranti nel problema matematico della Magnetofluidodinamica. Essa infatti, come sarà meglio spiegato in seguito, costituisce l'unica equazione necessaria e sufficiente alla formulazione matematica del problema maxwelliano nelle ipotesi fluido incompressibile e nella validità delle ipotesi di comportamento reologico, elettrico e magnetico precedentemente formulate. A partire dalla (4) si può scrivere:

$$(21) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{D})$$

Sostituendo la (8) in (21) si ottiene:

$$(22) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times [\sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})] + \nabla \times (\rho_e \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{D})$$

Tenendo conto delle equazioni costitutive maxwelliane (5) e (6) e della (3) si ha:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma \mu \left[ -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) \right] + \nabla \times (\rho_e \mathbf{u}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

la quale, tenendo conto delle equazioni (2), (3) e (5), può essere riscritta come:

$$(23) \quad -\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \left[ -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) \right] + \nabla \times (\rho_e \mathbf{u}) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

che risistemata porta a scrivere:

$$(24) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{\sigma \mu} \left[ \nabla^2 \mathbf{H} + \nabla \times (\rho_e \mathbf{u}) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \right]$$

Le ipotesi di Alfvén prima discusse permettono di riscrivere la (24), se  $\eta = 1/\sigma\mu$  è la *diffusività magnetica*, nel seguente modo:

$$(25) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) = \eta \nabla^2 \mathbf{H}$$

Questa è l'equazione u-H e quantifica l'interazione fra il campo cinetico ed il campo magnetico. La (25), essendo  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , può essere riscritta come:

$$(26) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \eta \nabla^2 \mathbf{H}$$

ovvero anche come:

$$(27) \quad \frac{D \mathbf{H}}{D t} = \eta \nabla^2 \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

dove si è indicato con:  $\frac{D}{D t} := \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  l'operatore di *derivata sostanziale*.

## PROBLEMA MAGNETOIDRODINAMICO

Le considerazioni fin d'ora qui fatte hanno consentito la scrittura di un set di equazioni sufficienti per la descrizione del problema dinamico di un fluido newtoniano, incomprimibile, elettricamente conduttore immerso in un campo magnetico e l'interazione del campo elettromagnetico con il fluido stesso (l'ipotesi di incomprimibilità giustificerebbe il termine *Magnetoidrodinamica* piuttosto che Magnetofluidodinamica). Considerata la trascurabilità di alcuni termini rispetto ad altri, le citate semplificazioni da introdurre nelle equazioni sono giustificate ipotizzando per il fluido le seguenti proprietà:

- *fluido incomprimibile;*
- *fluido viscoso;*
- *fluido a conduttività elettrica uniforme.*

Nell'equazione di Navier-Stokes bisogna considerare l'ipotesi di incomprimibilità e trascurare l'effetto delle cariche elettriche libere (per le ipotesi di Alfvén) ottenendo:

$$(28) \quad \rho \frac{D \mathbf{u}}{D t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{F}$$

La forza di Lorentz va modificata tenendo conto che per la prima ipotesi di Alfvén la (4) diventa  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$  e il campo di induzione magnetica può essere scritto per la relazione costitutiva (5) come  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , per cui:

$$(29) \quad \rho \frac{D \mathbf{u}}{D t} = -\nabla p + \mu' \nabla^2 \mathbf{u} + \mu (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{F}$$

dove con  $\mu'$  si è indicata la *viscosità dinamica del fluido* e  $\mu$  è la *permeabilità magnetica del mezzo*.

Alla (29) vanno aggiunte l'equazione di continuità della massa e la relazione di interazione del campo cinetico con il campo magnetico (25):

$$(30) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(31) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) = \eta \nabla^2 \mathbf{H}$$

La (29), la (30) e la (31) costituiscono le equazioni necessarie e sufficienti per la soluzione del problema Magnetofluidodinamico (insieme alle necessarie condizioni al contorno ed iniziali) di un fluido incompressibile ed elettricamente conduttore, valide nelle ipotesi precedentemente introdotte circa il comportamento reologico, elettrico e magnetico del fluido.