

## “STRATO LIMITE”: LA STRAORDINARIA INTUIZIONE DI LUDWIG PRANDTL

Valerio D’ALESSANDRO \*

\* *Ingegnere Termomeccanico; Dottorato di Ricerca in “Energetica”; Gruppo di Termofluidodinamica, Università Politecnica delle Marche*

### INTRODUZIONE

Nella settimana dell’8 Agosto 1904 nella città di Heildeberg (Germania), conosciuta essenzialmente per la sua architettura barocca, per il suo castello e per essere la prima sede universitaria tedesca (a partire già dal 1386), un piccolo gruppo di matematici e scienziati si incontrò per il terzo Congresso Internazionale di Matematica.

Uno dei partecipanti al congresso era *Ludwig Prandtl* (1875-1953), 29-enne professore al Politecnico di Hannover. La presentazione di Prandtl al congresso fu solamente di dieci minuti ma quel tempo gli fu necessario per illustrare un nuovo concetto che avrebbe rivoluzionato la Fluidodinamica. La sua dissertazione, ed il conseguente articolo che fu pubblicato fra le memorie del convegno l’anno successivo, introdusse il concetto dello “*strato limite in un flusso su una superficie solida*”. L’importanza dell’idea di Prandtl la si comprende immediatamente se si pensa che il moderno mondo dell’Aerodinamica e della Fluidodinamica ne risulta tutt’ora dominato. La sua incredibile intuizione gli sarebbe dovuta valere sicuramente il Premio Nobel, ma che non gli fu mai conferito (ai maligni piace dire che il Comitato della Fondazione Nobel fu riluttante nel premiare uno scienziato per aver ottenuto dei risultati nella ormai vecchia *fisica classica*).

### LA FLUIDODINAMICA PRIMA DI PRANDTL

Per capire l’importanza dell’innovazione introdotta da Prandtl bisogna necessariamente fare un passo indietro immergendosi in ciò che era la Fluidodinamica fino a Prandtl.

Gli albori della disciplina risalgono al III sec a.C. quando Archimede ed Erone, nel III secolo a.C., postularono la legge del parallelogramma per vettori, le leggi del galleggiamento e delle spinte idrostatiche.

Gli etruschi, successivamente, costruirono imponenti opere di acquedotti e fognature ma non hanno lasciato tracce dei loro “metodi” di calcolo (essi però hanno realizzato delle eccellenti costruzioni, alcune delle quali ancora funzionanti).

Mentre nel Medio Evo non vi furono avanzamenti nelle scienze fisiche e tecniche, nel XV secolo, grazie anche agli studi di Leonardo da Vinci (1452-1519), si riavviva l’interesse per la Fluidodinamica, con un’alternanza temporale tra periodi di progresso in ambito teorico e sperimentale (non sempre gli uni antecedenti agli altri). Leonardo in questo periodo, come anticipato, diede un importante impulso al progresso della scienza dei fluidi derivando l’equazione di conservazione della massa e descrivendo in modo accurato molti flussi: getti, salti idraulici, formazione di vortici, corpi a bassa ed ad alta resistenza, prototipi di macchine fluidodinamiche (pompe, elicotteri, paracadute).

Il francese Mariotte nel XVII secolo costruì il primo tunnel a vento e misurò la resistenza di corpi. Per l’inquadramento teorico della dinamica dei corpi in movimento si dovettero però aspettare gli studi di Isaac Newton (1642-1727), il quale dedicò il secondo volume dei suoi *Principia Matematica* (1687) interamente all’analisi della statica e dinamica dei fluidi. A Newton, inoltre, si deve la descrizione della fenomenologia della viscosità dei fluidi.

Una formulazione matematica più evoluta della Fluidodinamica è, però, disponibile a partire solo dal secolo successivo alla pubblicazione dei *Principia*: infatti, è solo con il contributo di Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean le Rond d’Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783) che si raggiunge questo risultato.

Di questi straordinari scienziati fu Euler che diede il maggior contributo strumentale e concettuale alla Fluidodinamica: egli infatti fu il primo a descrivere il flusso di un fluido in termini di campi tridimensionali di pressione e velocità e a modellare i fluidi come continui deformabili. Euler applicò per lo studio della dinamica dei fluidi il principio di conservazione della massa e la fondamentale seconda legge di Newton ottenendo due equazioni alle derivate parziali non lineari accoppiate contenenti il campo di pressione e di velocità. Il lavoro di Euler diede notevoli contributi alla Fluidodinamica Teorica, benchè egli scrisse le sue equazioni senza mettere in conto l’effetto dell’attrito agente sulla particella fluida per effetto del suo stesso stato dinamico, poiché egli non considerò gli effetti della viscosità.

Bernoulli, in seguito, ricavò alcune soluzioni integrali delle equazioni di Euler mentre d’Alembert arrivò a formulare il suo celebre paradosso: sui corpi immersi in un fluido è assente la forza aerodinamica (stando alle conoscenze dell’epoca).

La risoluzione di questo paradosso non era alla portata degli studiosi di fluidodinamica di allora; lo studio degli effetti viscosi, infatti, venne svolto quasi esclusivamente da sperimentali: Chèzy, Pitot, Borda, Weber, Francis, Hagen, Poiseuille, Darcy, Manning, Bazin, Wiesbach in quell’epoca lavorarono in special modo a problemi idraulici viscosi quali canali aperti, resistenza di scafi, flussi in tubi, onde superficiali, pompe e turbine, fornendo dati di ottimo livello, molte volte raggiunti in modo crudo con correlazioni ma senza la comprensione degli aspetti fisici fondamentali.

Gli scienziati non avevano ancora considerato gli effetti della viscosità nelle loro equazioni, e si dovette aspettare un altro secolo per arrivare a scrivere un sistema di equazioni non lineari più elaborato e completo di quello di Euler, il sistema noto col nome di *Equazioni di Navier-Stokes*.

Le equazioni di Navier-Stokes furono derivate per la prima volta di Claude-Louis Navier (1780-1836) nel 1822 e poi indipendentemente da George Stokes (1819-1903) nel 1845. Oggi queste equazioni rappresentano lo standard nella descrizione matematica della dinamica dei fluidi, ma non è stata ancora ottenuta la loro soluzione analitica. In particolare, i matematici sono stati solamente in grado di dimostrare la buona posizione del problema in forma debole e, purtroppo, non è stata ancora dimostrata l’esistenza e l’unicità della soluzione delle equazioni in forma forte. Questo problema è di così difficile soluzione da essere considerato uno dei *Sette Problemi matematici del Millennio* enunciati dal Clay Mathematics Institute. La sua soluzione sarebbe di fondamentale importanza per confermare che le Equazioni di Navier-Stokes costituiscono il modello corretto in grado di descrivere tutti gli aspetti della Fluidodinamica ed in particolare i meccanismi di generazione della turbolenza.

L’assenza di soluzioni analitiche per le equazioni di Navier-Stokes risultò essere particolarmente frustrante nell’analisi di diversi problemi pratici nei quali era importante calcolare lo sforzo di taglio alla parete di un corpo immerso in una corrente fluida. Con l’invenzione del primo aeroplano all’inizio del XX secolo da parte di Orville e Wilbur Wright (il primo volo avvenne il 17 dicembre 1903) queste difficoltà divennero ancor più pressanti per la necessità di dover calcolare la resistenza e la portanza dei profili alari.

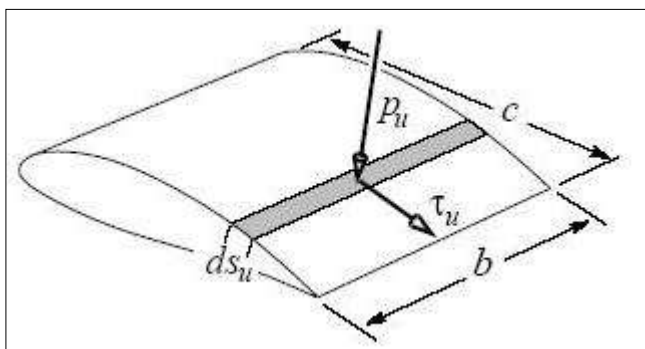


Figura 1

Nel flusso dell’aria attorno ad un generico profilo alare si avrà necessariamente che il fluido esercita una forza sul profilo. Nella Figura 1 vengono mostrate le due sorgenti di forza: la pressione e lo sforzo viscoso di taglio il quale deriva dall’attrito del fluido con la parete solida. Per determinare la forza che il fluido esercita sul profilo (che è poi quella che permette di sostenere il peso dell’intero velivolo nelle applicazioni aeronautiche) gli studiosi di aerodinamica devono calcolare la distribuzione della pressione e dello sforzo viscoso di taglio sulla superficie dell’ala.

All’inizio del XX secolo la distribuzione di pressione si poteva ottenere ipotizzando una serie di approssimazioni; comunque, il calcolo della distribuzione di pressione è meno problematico di quello degli sforzi di taglio poiché, mentre nel primo caso non si commettono apprezzabili errori ipotizzando che il fluido sia non viscoso, il calcolo degli sforzi viscosi richiede, invece, l’introduzione dei termini viscosi nelle equazioni del moto. Cento anni fa, purtroppo (o per fortuna?), le equazioni di Navier-Stokes non potevano essere risolte in alcun modo. Ci si trovava in condizioni critiche.

## LO STRATO LIMITE

Ludwig Prandtl nel suo articolo, presentato al congresso di Heidelberg, intitolato “*Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*” (“*Sul moto dei fluidi con poco attrito*”) diede la prima descrizione del concetto di strato limite permettendo di calcolare teoricamente (solo su particolari geometrie) gli sforzi viscosi. Egli, assumendo la condizione di adesione del fluido alla parete solida, teorizzò che gli effetti dell’attrito viscoso fossero concentrati in una sottile regione del campo di moto, lo *strato limite*, di dimensione caratteristica  $\delta$  molto minore di quella caratteristica  $L$  del corpo investito dalla corrente fluida, e localizzata in prossimità della superficie del corpo solido. Il concetto di strato limite è chiarito schematicamente dalla Figura 2.

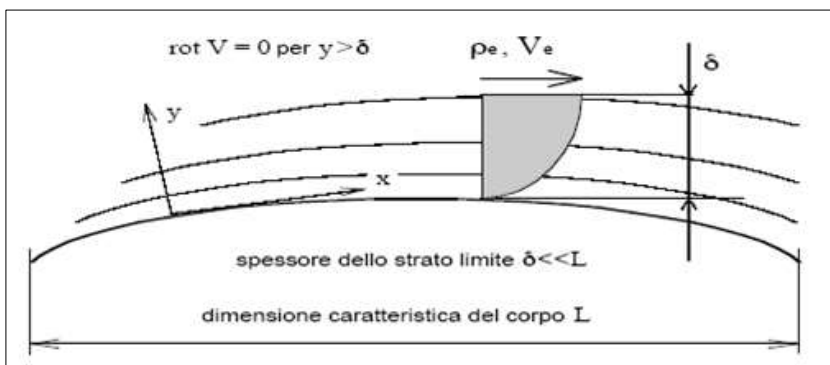


Figura 2

Risulta abbastanza facile convincersi, osservando Figura 2, che la velocità cambia molto in direzione normale alla superficie, e ciò vuol dire che lo strato limite è una regione con forti gradienti di velocità e, questo, in accordo con la legge di Newton-Petroff (secondo cui gli sforzi viscosi di taglio sono direttamente proporzionali ai gradienti di velocità), significa che gli sforzi viscosi di taglio nello strato limite risultano essere molto intensi.

In definitiva, la resistenza all’avanzamento di un corpo in una corrente fluida associata agli sforzi viscosi non risulta affatto trascurabile, al contrario invece di quanto pensavano alcuni studiosi di fluidodinamica agli inizi del XIX secolo. Un altro grande risultato di Prandtl.

La separazione del flusso dalla parete solida è poi un altro grande successo della teoria di Prandtl.



Figura 3

In determinati casi ed in certe condizioni completamente determinate da condizioni esterne il flusso si può separare dalla parete solida: in queste particolari condizioni di flusso nella parte posteriore del corpo si forma la scia (essenzialmente una regione di aria morta) come si può notare in Figura 3.

La separazione assume molta importanza in Aerodinamica in quanto come sua conseguenza produce una radicale variazione della distribuzione di pressione sulla superficie del corpo. L’alterazione della distribuzione di pressione è responsabile di una resistenza all’avanzamento del corpo nella corrente fluida nota sotto il nome di *Resistenza di Forma* (*Form Drag*).

In condizioni di fenomeni di separazione importanti (dimensione caratteristica della scia grande) la resistenza di forma risulta essere maggiore di quella dovuta all’attrito e se ne comprende subito l’importanza, prima accennata, che questa riveste in Aerodinamica. Prandtl spiegò tale effetto come segue.

Le condizioni di flusso che tendono a promuovere i fenomeni di separazione sono quelle che riscontrano un incremento di pressione nella direzione del flusso (gradiente di pressione avverso) (Figura 4).

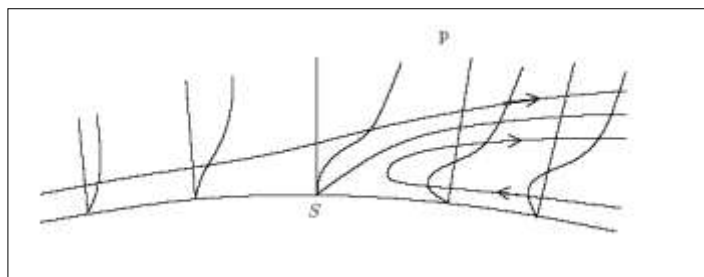


Figura 4

In queste condizioni la pressione (e parallelamente alla pressione agiscono anche gli sforzi viscosi di taglio) tende ad arrestare la particella fluida finché si giunge ad una condizione in cui il profilo di velocità ha tangente geometrica verticale (punto S) o, equivalentemente, una variazione di concavità. A partire dal punto S, quindi, si ha la separazione della corrente fluida dalla parete che consiste nel sollevamento dello strato limite rispetto alla parete solida.

La conoscenza dell’andamento della velocità all’interno dello strato limite (a cui si può arrivare applicando le equazioni derivanti della teoria di Prandtl) permette localizzare il punto di separazione del flusso che è, come detto, un elemento importante per il calcolo della resistenza aerodinamica di un corpo.

L’articolo del 1905, oltre agli appena citati importantissimi risultati, aprì una nuova stupefacente frontiera nell’Aerodinamica e nella Fluidodinamica. Alla luce dei risultati di Prandtl si capì che il flusso attorno ad un corpo, può essere diviso in due regioni: un sottile strato in prossimità della superficie del corpo (lo strato limite) dove le forze di attrito viscoso sono comparabili con quelle d’inerzia e una regione, esterna allo strato limite, in cui le forze viscoso sono trascurabili.

Il lavoro di Prandtl, nonostante la sua straordinaria originalità, rimase tuttavia confinato per molti anni nella stretta cerchia dei suoi collaboratori all’Università di Gottingen (dove si trasferì già l’anno dopo del suo risultato rivoluzionario assumendo la direzione dell’Istituto di Fisica Tecnica e rimanendovi fino alla fine della sua carriera). Quegli studi ebbero una diffusione a livello internazionale solo nel 1908 quando Henrich Blasius, studente di Prandtl, pubblicò, sull’importante rivista *Zeitschrift fur Mathematik und Physik*, l’articolo dal titolo “*Strati Limite in Fluidi con Poco Attrito*” in cui affrontò l’analisi dello strato limite su una lastra piana e su un cilindro circolare. Blasius riuscì a trovare la soluzione delle equazioni dello strato limite in entrambi i casi. Per la lastra piana ottenne addirittura, per la Resistenza d’Attrito, una soluzione più raffinata di quella ottenuta da Prandtl stesso nel celeberrimo articolo del 1904. Per il cilindro circolare, ottenne il punto di separazione del flusso collocato nella parte posteriore del cilindro.

Del lavoro di Blasius si trova traccia anche nei moderni testi di Fluidodinamica: infatti, le equazioni dello strato limite, pur rimanendo delle equazioni alle derivate parziali non lineari e accoppiate, sono formalmente più semplici delle equazioni di Navier-Stokes (nel caso di moto piani si ottiene un’unica equazione a derivate parziali non lineare del terzo ordine). Tuttavia, per certe condizioni di gradiente di pressione nel flusso, le equazioni dello strato limite si riducono ad una sola equazione differenziale ordinaria. Questa semplificazione la si ottiene, ad esempio, in condizioni di gradiente di

pressione costante lungo una parete piana orientata parallelamente al flusso ad angolo di attacco nullo e l’equazione che ne deriva e tutt’oggi chiamata *equazione di Blasius*.

Nel 1921 Theodore von Karman, Professore all’università di Aachen, ottenne l’equazione integrale della quantità di moto attraverso il semplice espediente di integrare le equazioni dello strato limite in direzione ortogonale alla direzione in cui lo strato limite stesso si sviluppa. L’equazione di Von Karman è applicabile direttamente ad una moltitudine di casi di interesse pratico e, grazie ad essa, la teoria dello strato limite conobbe maggior attenzione, venendo “accettata” anche dalla comunità tecnica.

Il lavoro di Ludwig Prandtl rivoluzionò l’approccio degli scienziati ai problemi fluidodinamici; prima di Prandtl, infatti, regnava la confusione attorno al ruolo della viscosità nei flussi. Dopo il 1904 il quadro fu nettamente più chiaro, quando si comprese che in molti casi la viscosità entrava in gioco solo in una sottile regione immediatamente adiacente alla superficie solida. Un grandissimo lavoro.

Infine c’è da aggiungere che quello che essenzialmente Prandtl intuì fu come trattare una espansione asintotica non uniforme di un’equazione differenziale che possiede un parametro “piccolo”, un lavoro che diede l’impulso per l’avvio degli studi in questo settore dell’Analisi Matematica.

## NON SOLO STRATO LIMITE

Ludwig Prandtl (Figura 5) diede anche moltissimi contributi alla scienza dei fluidi, contributi che non si fermarono solo alla teoria dello strato limite: infatti, egli sviluppò una teoria per il calcolo del coefficiente di portanza ed il coefficiente di momento riferito al quarto di corda per profili alari sottili camberati.



Figura 5

La sua *Teoria dei Profili Sottili* fu sviluppata durante la I Guerra Mondiale ed è tutt’oggi usata come primo calcolo pratico per le proprietà dei profili alari. Durante lo stesso periodo sviluppò la famosa *Teoria della Linea Portante per le Ali*, anch’essa di uso comune tutt’oggi: essa fornì un metodo per il calcolo dell’influenza del rapporto di allungamento dell’ala sulla resistenza della stessa confermando l’esistenza di una Resistenza Indotta dovuta alla presenza di vortici di ricircolo.

Nell’Aerodinamica delle Alte Velocità Prandtl ed il suo studente Theodor Mayer svilupparono la prima teoria per il calcolo delle proprietà di un urti obliqui e di onde di espansione in flusso supersonico; quel lavoro risalente al 1908 precede di ben quarant’anni il primo aereo supersonico.

Negli anni ‘20, contemporaneamente a Hermann Glauert ma in maniera indipendente, sviluppò la prima regola di correzione dei coefficienti portanza dei profili alari operanti a basse velocità per tener conto degli effetti di comprimibilità del fluido alle alte velocità subsoniche. Questo contributo riscosse un grande successo negli studi sugli aerei ad alta velocità della II Guerra Mondiale.

Nel 1929 Prandtl ed Adolf Busemann applicarono per primi il metodo delle caratteristiche per progettare con una forma adeguata un ugello supersonico. Oggi tutti i progetti di ugelli per gallerie del vento supersoniche e di ugelli per motori missilistici si basano sulla tecnica del 1929.

Tutti quelli citati sono solo alcuni dei tantissimi contributi dati da Prandtl, uno dei protagonisti più illustri nei campi della Meccanica e della Fluidodinamica del XX secolo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J.D. Anderson, Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. 4<sup>th</sup> edition, McGraw Hill, New York.
- [2] J.D. Anderson, Jr. *Ludwig Prandtl’s Boundary Layer*. *Physics Today*, December 2005; American Physical Society.
- [3] A. Baron. *Lo Strato Limite – Dispense del Corso di Fluidodinamica I*. [www.aero.polimi.it](http://www.aero.polimi.it), Politecnico di Milano, 2004.
- [4] C. Golia. *Fluidodinamica*. 143.225.250.187/Docenti/Golia/Appunti, Seconda Università di Napoli, 2005.
- [5] R. Piva. *Dispense del Corso di Fluidodinamica I*. Università degli Studi “La Sapienza”, Roma, 2005.
- [6] A. Sonin. *Advanced Fluid Dynamics, Lecture Notes – Fall 2002*. [ocw.mit.edu](http://ocw.mit.edu), MIT, Cambridge (MA), 2002.
- [7] M. van Dyke. *An Album of fluid motion*. The Parabolic Press, Stanford, CA, 1982.