CONDUZIONE TERMICA INSTAZIONARIA IN UN CILINDRO OMOGENEO E ISOTROPO

Valerio D'ALESSANDRO *

* *Ingegnere Termomeccanico; Dottorato di Ricerca in "Energetica"; Gruppo di Termofluidodinamica, Università Politecnica delle Marche*

EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE TERMICA

Il problema fisico della conduzione termica è retto da un'equazione differenziale lineare alle derivate parziali non omogenea che si ottiene a partire da una legge generale e da un'equazione costitutiva: la prima è ottenuta a partire dal primo principio della termodinamica e la seconda, invece, è ottenuta dall'osservazione fisica del fenomeno ed è poi avvalorata dal postulato di produzione entropica.
Il procedimento logico che porta alla derivazione dell'equazione generale della conduzione, come accennato, è basato sull'applicazione del primo principio ad un volume di controllo che sia interessato da soli scambi termici conduttivi; si deduce facilmente che deve essere:

Flusso termico conduttivo + *Generazione interna di calore* = *Variazione nel tempo dell'energia interna*

essendo lo scambio di lavoro fra il volume di controllo e l'ambiente nullo in quanto si è nell'ambito della *Trasmissione del Calore*. A questo punto di ottiene:

(1) $$-\oint\!\!\oint_{\partial\Omega} \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iiint_{\Omega} G(\mathbf{r},t)\,d\Omega = \rho c \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r},t)\,d\Omega$$

dove il primo addendo al primo membro della (1) rappresenta la *potenza termica netta* scambiata per conduzione attraverso il volume di controllo fissato, essendo $\mathbf{\Phi}$ il *vettore flusso termico*; il secondo addendo è il termine rappresentativo della *generazione interna di potenza termica* con G = G($\mathbf{r}$,t) generazione volumetrica di potenza termica; al secondo membro è invece indicata la *variazione di energia interna nel tempo* all'interno del volume di controllo. Applicando il teorema di Gauss-Green si ha che:

(2) $$\oint\!\!\oint_{\partial\Omega} \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_{\Omega} (\nabla\cdot\mathbf{\Phi})\,d\Omega$$

Sostituendo la (2) nella (1):

(3) $$-\iiint_{\Omega} (\nabla\cdot\mathbf{\Phi})\,d\Omega + \iiint_{\Omega} G(\mathbf{r},t)\,d\Omega = \rho c \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r},t)\,d\Omega$$

Riordinando e tenendo conto della linearità dell'operatore integrale si ottiene:

(4) $$\iiint_{\Omega} \left[-\nabla\cdot\mathbf{\Phi} + G(\mathbf{r},t) - \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r},t)\right] d\Omega = 0$$

Poiché l'integrale (4) è nullo qualunque sia il dominio di integrazione, richiamando un fondamentale teorema dell'Analisi, si deduce che anche il campo scalare integrando deve essere necessariamente nullo per cui:

(4,a) $$\nabla\cdot\mathbf{\Phi} + G(\mathbf{r},t) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},t)$$

A partire dall'equazione generale, per raggiungere la chiusura del problema è necessario introdurre un'equazione costitutiva che leghi il flusso termico alla campo termico: funziona molto bene, a tal proposito, il postulato di Fourier che nell'ipotesi di mezzo isotropo si scrive nella forma:

(4,b) $$\mathbf{\Phi} = -\lambda \nabla T(\mathbf{r},t)$$

il quale, come già detto, è frutto dell'osservazione fisica ma è fortemente avvalorato dal postulato di produzione entropica: si può dimostrare, infatti, che il postulato di Fourier soddisfa il postulato di produzione dell'entropia. Sostituendo la (4,b) in (4,a) si ottiene:

(5) $$\nabla \cdot [\lambda \nabla T(\mathbf{r},t)] + G(\mathbf{r},t) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},t)$$

che nell'ipotesi di mezzo omogeneo:

(6) $$\nabla^2 T(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\lambda} G(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},t)$$

La (5) è l'*equazione fondamentale della conduzione termica in un mezzo omogeneo e isotropo*. Nel seguito si farà riferimento ai soli casi in cui la generazione di calore sia assente (G(**r**,t)=0). In questa ipotesi la (6) si riduce ad un'equazione di Fourier:

(7) $$\nabla^2 T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},t)$$

La soluzione della (7) consente di determinare il campo termico all'interno del dominio in esame, e di calcolare quindi il flusso termico attraverso le superfici.
In generale per le equazioni alle derivate parziali e, quindi, anche per l'equazione della conduzione, non è possibile ricavare una soluzione per via analitica ed i metodi di integrazione analitica disponibili (come la tecnica di separazione delle variabili) sono di limitata applicabilità. Peraltro, anche in casi in cui si conosca un'integrale generale, non è detto che si riesca a determinare un integrale particolare. Per ottenere quest'ultimo, infatti, bisogna assegnare opportune condizioni al contorno sulla temperatura (e/o sulle sue derivate) alla frontiera del dominio. L'integrale generale, inoltre, dipende da funzioni arbitrarie (e non da costanti arbitrarie, come accade per le equazioni differenziali ordinarie), e l'imposizione delle condizioni comporta la risoluzione di problemi matematici, in generale, estremamente complicati. Di conseguenza, dal punto di vista teorico, ci si deve accontentare di studiare solamente l'*esistenza* e l'*unicità* della soluzione di una equazione alle derivate parziali. Queste considerazioni esprimono l'importanza dell'utilizzo dei *metodi numerici.*
L'obiettivo di questa breve esposizione consiste nel determinare una soluzione della (7), la quale sarà trovata sotto opportune ipotesi semplificative che saranno spiegate in seguito. Le condizioni al contorno che si possono porre per un problema differenziale come quello della conduzione termica sono essenzialmente di 3 tipi e, nell'ambito della Trasmissione del Calore, si classificano come segue.

• *Condizioni al contorno del primo tipo (o di Dirichlet):*
Si ha quando è fissata la temperatura sulla superficie del dominio; nel caso generale la temperatura è funzione sia del tempo che dello spazio:

(7,a) $$t_S = f(\mathbf{r},t)$$

Casi particolari della (7,a) si hanno se la temperatura è funzione solo della posizione o solo del tempo o, ancor più semplicemente se è una costante.

• *Condizioni al contorno del secondo tipo (o di Neumann):*
Si ha quando è fissata la derivata normale della temperatura sulla superficie del dominio; tale derivata può essere funzione sia del tempo che dello spazio:

(7,b) $$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = f(\mathbf{r},t)$$

Questa condizione al contorno equivale a fissare il flusso termico attraverso la superficie del dominio di integrazione dell'equazione. In particolare è:

(7,c) $$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = 0$$

se il corpo è termicamente isolato. Un esempio di condizione al contorno di II tipo si ha a regime in un conduttore percorso da corrente elettrica: sulla superficie del conduttore vi è un flusso di calore generato internamente per effetto Joule. La stessa cosa si può avere sulla superficie di un elemento di combustibile nucleare sede di processi di fissione.

• *Condizione al contorno di terzo tipo (o di Robin):*
Si ha quando è fissata una combinazione lineare fra la temperatura della superficie e la derivata normale alla superficie stessa:

(7,d) $$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s + t_s = f(\mathbf{r}, t)$$

Fisicamente ciò significa che vi è trasmissione del calore per convezione, in accordo con la legge di Newton, fra le superfici del corpo e il mezzo esterno (fluido) la cui temperatura t_f può variare sia con il tempo sia con la posizione lungo la superficie.

I tre tipi di condizioni al contorno descritti coprono la maggior parte delle possibili casistiche associate agli scambi termici conduttivi e hanno la proprietà fondamentale di essere condizioni al contorno lineari.

PARAMETRI ADIMENSIONALI NELLO STUDIO DELLA CONDUZIONE TERMICA

Nei problemi di Trasmissione del Calore, e nella Fisica Tecnica in generale, è utile ricorrere all'introduzione di quantità adimensionali in modo da ridurre il numero di variabili in gioco e ottenere una maggiore generalità nei risultati finali. Nell'ambito della conduzione termica si definiscono le seguenti variabili adimensionali:

Coordinata adimensionale: $X = \frac{x}{L}$

Temperatura adimensionale: $\Theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}$

Numero di Biot: $Bi = \frac{hL}{\lambda}$

Numero di Fourier o tempo adimensionale: $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$

Il significato fisico del numero di Fourier lo si può facilmente ricavare scrivendolo nella forma:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\lambda t}{\rho c L^2} \Rightarrow Fo = \frac{\frac{\lambda}{L} L^2 t}{c \rho L^3}$$

Esso il rappresenta il rapporto fra la quantità di calore trasmessa per conduzione nel tempo t attraverso lo strato di spessore L e il volume L^3 sotto una differenza di temperatura unitaria e la capacità termica dello strato stesso; maggiore è il numero di Fourier maggiore è la penetrazione di calore nel corpo in un determinato intervallo di tempo. Il significato fisico del numero di Biot si ottiene, analogamente al numero di Fourier, riscrivendolo come:

$$Bi = \frac{hL}{\lambda} = \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{h}}$$

Scritto in questa forma, esso equivale al rapporto fra la resistenza termica unitaria conduttiva e quella convettiva. Il numero di Bi esprime un criterio per stabilire fino a che punto sia opportuno considerare la distribuzione di temperatura uniforme in un corpo nei problemi di scambio termico in regime variabile. In altri termini il numero di Biot determina il campo di applicabilità del *cosiddetto approccio a parametri concentrati*, che è applicabile nella condizione che risulti:

$$Bi < 0.1$$

PROBLEMA DEL CILINDRO OMOGENEO ED ISOTROPO

L'obiettivo che ci si prefigge è di ricavare la distribuzione della temperatura in un cilindro infinito costituito da materiale omogeneo ed isotropo in assenza di generazione interna di calore inizialmente a temperatura uniforme e costante e, successivamente, portato in maniera impulsiva sulla sua superficie laterale ad una temperatura inferiore a quella iniziale. Si assume inoltre che sia valida la condizione Bi $>>$ 1 in modo da poter trascurale lo scambio termico convettivo del cilindro con l'esterno. Il problema fisico brevemente descritto trova la seguente formulazione analitica:

(8) $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \begin{array}{l} T(r,0)=T_i \\ T(R,t)=T_e \end{array}$$

La soluzione del problema differenziale sopra esposto può essere trovata con il metodo di separazione delle variabili, nell'applicare questo metodo è sempre conveniente avere condizioni al contorno omogenee, perciò in tale ottica è utile porre:

(9) $$\theta(r,t)=T(r,t)-T_e$$

Alla luce della (9) l'equazione (8) e le sue condizioni al contorno diventano:

(10) $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad \begin{array}{l} \theta(r,0)=\theta_i \\ \theta(R,t)=0 \end{array}$$

Ci si pone l'obiettivo di trovare la soluzione della (10) nella forma:

(11) $$\theta(r,t)=F(r)G(t)$$

Sostituendo (11) in (10) si ottiene:

(12) $$\frac{1}{r}\frac{F^{'}(r)}{F(r)}+\frac{F^{''}(r)}{F(r)}=\frac{1}{\alpha}\frac{G^{'}(t)}{G(t)}$$

La (12) può essere soddisfatta se e solo se entrambi i suoi membri sono uguali ad una medesima costante. Essendo essi connessi a due variabili reciprocamente indipendenti; per coerenza fisica con il problema in esame, inoltre, è necessario che tale costante sia negativa: dovendo il cilindro smaltire l'eccesso di temperatura in esso presente. Si ottiene quindi:

(13) $$F^{''}(r)+\frac{1}{r}F^{'}(r)+\beta^2F(r)=0$$

(14) $$G^{'}(t)+\alpha\beta^2G(t)=0$$

La (13) è un'*equazione di Bessel di ordine zero*: le soluzioni di tale equazione si dicono funzioni cilindriche e fra tali funzioni si annoverano le *funzioni di Bessel di prima e seconda specie* e le *funzioni di Henkel*. In questa trattazione si farà riferimento alle sole funzioni di Bessel di primo ordine e di prima specie. Una generica soluzione della (13) è:

(15) $$F(r)=C_1J_0(\beta r)$$

nella (15) $J_0(\beta r)$ è la *funzione di Bessel di primo ordine e prima specie* così definita:

$$J_0(\beta r)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[(n+1)!]^2}\left(\frac{\beta r}{2}\right)^{2n}$$

La soluzione della (14) ha invece la forma:

(16) $$G(t)=C_2e^{-\alpha\beta^2 t}$$

Sostituendo (14) e (16) in (11) si ottiene:

(17) $$\theta(r,t) = Ae^{-\alpha\beta^2 t} J_0(\beta r)$$

La (17) deve soddisfare la condizione al contorno per cui:

$$\theta(r = R,t) = Ae^{-\alpha\beta^2 t} J_0(\beta R) = 0 \Leftrightarrow \beta R = \lambda_n$$

dove λ_n sono gli zeri positivi ordinati in maniera crescente di $J_0(\beta r)$. La costante arbitraria β, che si è introdotta per necessità analitica, in definitiva è connessa agli zeri della funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero ed al raggio del cilindro:

(18) $$\theta(r,t) = Ae^{-\alpha\frac{\lambda_n^2}{R^2}t} J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} r\right)$$

La (18) rappresenta una insieme numerabile di soluzioni particolari dell'equazione che governa il problema e da esse si parte per ottenere l'integrale della generale della (8) che può essere scritto come combinazione lineare delle (18):

(19) $$\theta(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha\frac{\lambda_n^2}{R^2}t} J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} r\right)$$

Sulla (19) può essere finalmente imposta la condizione iniziale di temperatura uniforme da cui si ottiene:

(20) $$\theta_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} r\right)$$

La (20) può essere sfruttata per ottenere i coefficienti dello sviluppo in serie. Poiché per le funzioni di Bessel vale la proprietà di ortogonalità:

(21) $$\int_0^1 x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x)\,dx = \frac{1}{2}\left[J_\nu'(\lambda_n)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n}\right) J_\nu(\lambda_n^2) \qquad \text{per} \quad \lambda_n = \lambda_m$$

per funzioni di Bessel di ordine zero la (21) diviene banalmente:

(22) $$\int_0^1 x J_0(\lambda_n x) J_0(\lambda_m x)\,dx = \frac{1}{2}\left[J_0'(\lambda_n)\right]^2 \delta_{nm}$$

Operando il cambio di variabile x = r/R si può scrivere:

(23) $$\int_0^R r J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) J_0\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) dx = \frac{R^2}{2}\left[J_0'(\lambda_n)\right]^2 \delta_{nm}$$

La (23) ha un ruolo di primo piano nel calcolo dei coefficienti A_n.

A tal fine moltiplicando entrambi i membri della (20) per $rJ_0\left(\frac{\lambda_m}{R} r\right)$ ed integrando nell'intervallo [0,R] si ottiene:

(24) $$\theta_i \int_0^R r J_0\left(\frac{\lambda_m}{R} r\right) dr = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^R r J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} r\right) J_0\left(\frac{\lambda_m}{R} r\right) dr$$

Si precisa che è possibile l'invertibilità di serie ed integrale poichè sono soddisfatte le ipotesi dei teoremi che regolano tale passaggio. Valendo inoltre le relazioni:

(25) $$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = -x^{\nu}J_{\nu+1}(x)$$

(26) $$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_\nu(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

per le funzioni di ordine zero deve risultare:

(27) $$J_0^{'}(x) = -J_1(x)$$

Operando il cambio di variabile x = r/R nella (26) si ottiene, per $\nu = 1$:

(28) $$\frac{d}{dr}\left[\frac{R}{\lambda_n} rJ_1\left(\frac{\lambda_n}{R}r\right)\right] = rJ_0\left(\frac{\lambda_n}{R}r\right)$$

Tenendo conto della (23) e della (28), l'equazione (24) assume la forma:

(29) $$\theta_i \frac{R}{\lambda_n} rJ_1\left(\frac{\lambda_n}{R}r\right)\Bigg|_0^R = A_n \frac{R^2}{2}\left[J_1(\lambda_n)\right]^2$$

Da semplici calcoli algebrici, e tendendo conto che $J_1(0) = 1$, a partire dalla (29) si ottiene l'espressione finale dei coefficienti A_n:

(30) $$A_n = \frac{2\theta_i}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

Sostituendo la (30) nella (24) si ottiene l'integrale del problema differenziale a cui si è fatto riferimento ad inizio di paragrafo:

(31) $$\theta(r,t) = 2\theta_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} e^{-\alpha\frac{\lambda_n^2}{R^2}t} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_n}{R}r\right)}{J_1(\lambda_n)}$$

A questo punto, la formulazione adimensionale della distribuzione di temperatura nel dominio diventa:

(32) $$\Theta\left(R^*, Fo\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 Fo} \frac{J_0\left(\lambda_n R^*\right)}{J_1(\lambda_n)}$$

Il flusso termico, invece, lo si ottiene direttamente dal postulato di Fourier:

(33) $$\mathbf{\Phi} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\mathbf{e_r} = \mathbf{e_r}\frac{2\lambda\theta_i}{R}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha\frac{\lambda_n^2}{R^2}t} \frac{J_1\left(\frac{\lambda_n}{R}r\right)}{J_1(\lambda_n)}$$

Nella pratica ingegneristica è consolidata l'abitudine di troncare gli sviluppi in serie, che compaiono nelle soluzioni dell'equazione di Fourier, al primo ordine, in quanto per $F_0 > 0{,}2$ l'errore che si commette è inferiore al 2%.