ONDE MAGNETOIDRODINAMICHE

Valerio D'ALESSANDRO *

* *Ingegnere Termomeccanico; Dottorato di Ricerca in "Energetica"; Gruppo di Termofluidodinamica, Università Politecnica delle Marche*

INTRODUZIONE

La Magnetoidrodinamica (*Magneto-Hydro-Dynamic, MHD*) studia le interazioni tra il moto dei fluidi elettricamente conduttori e il campo magnetico. Uno dei problemi più importanti della MHD riguarda la formazione e la propagazione di onde dovute a piccole perturbazioni. I moti ondosi nei fluidi elettricamente conduttori presentano lineamenti caratteristici assai interessanti e trovano applicazione nella *Fisica dei Plasmi*, nell'ambito della fusione nucleare, nonché in vari settori di ricerca dell'Astrofisica come, ad esempio, lo studio delle macchie solari. Nel seguito si presenta una breve rassegna di casi piuttosto semplici.

ONDE DI ALFVEN

Le onde MHD più semplici sono quelle in cui la velocità di fase dell'onda è parallela alle linee di forza magnetica e la velocità della particella è perpendicolare alle linee di forza magnetica.
Per iniziare consideriamo un fluido ideale (fluido non viscoso, incomprimibile e ad alta conduttività elettrica) ed ipotizziamo l'assenza di forze di massa non elettromagnetiche. Supponiamo che il fluido sia immerso in un campo magnetico $\mathbf{H_0}$ uniforme e costante. Se $\mathbf{h}$ è il campo magnetico indotto dovuto alla perturbazione, il campo magnetico totale risulta essere: $\mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{h}$.
Nell'ambito delle ipotesi introdotte è sufficiente utilizzare l'equazione di Eulero ridotta delle forze non elettromagnetiche e comprensiva dei termini elettromagnetici (si presuppone noto il significato dei simboli delle grandezze che vi compaiono):

(1) $$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$$

L'espressione $\nabla \mathrm{x} \mathbf{H}$ può essere riscritta come: $\nabla \mathrm{x} \mathbf{H} = \nabla \mathrm{x} \mathbf{H_0} + \nabla \mathrm{x} \mathbf{h}$ cioè si ha:

(2) $$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{h}$$

essendo $\mathbf{H_0}$ un campo vettoriale uniforme. Consideriamo ora una terna ortogonale destra $S:=\{(O;x,y,z)\}$ il cui l'asse O_z sia nella direzione e nel verso del campo magnetico uniforme $\mathbf{H_0}$. Facciamo l'ipotesi di piccole oscillazioni per la quale possiamo trascurare i quadrati ed i prodotti delle quantità piccole $\mathbf{h}$ ed $\mathbf{u}$. Riscriviamo la (1) come:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$$

la quale in virtù della formula: $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$

e dell'incomprimibilità del fluido può essere riscritta nel seguente modo:

(3) $$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\right] = -\nabla p + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$$

Il termine convettivo al primo membro della (3) è trascurabile per l'ipotesi delle piccole oscillazioni. Il termine magnetico della (3) può essere invece riscritto come:

(4) $$(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H} - \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2\right)$$

Il primo termine al secondo membro della (4) diventa:

$$(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} = [(\mathbf{H_0} + \mathbf{h})\cdot\nabla](\mathbf{H_0} + \mathbf{h})$$

cioè anche:

(5) $$(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H_0}\cdot\nabla)\mathbf{H_0} + (\mathbf{H_0}\cdot\nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathbf{H_0} + (\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathbf{h}$$

Il primo ed il terzo termine al secondo membro della (5) sono nulli vista l'uniformità di $\mathbf{H_0}$ e l'ultimo termine al secondo membro è trascurabile vista l'ipotesi di piccole oscillazioni, perciò:

(6) $$(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} \cong (\mathbf{H_0}\cdot\nabla)\mathbf{h_0}$$

Il secondo termine al secondo membro della (4) può essere a sua volta essere riscritto come:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2\right) = \frac{1}{2}\nabla[(\mathbf{H_0} + \mathbf{h})\cdot(\mathbf{H_0} + \mathbf{h})]$$

Applicando la proprietà distributiva prodotto scalare rispetto alla somma vettoriale si ottiene:

(7) $$\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2\right) = \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{H_0}|^2\right) + \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{h}|^2\right) + \nabla(\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h})$$

Il primo termine al secondo membro è trascurabile poiché $\mathbf{H_0}$ è uniforme, il secondo è nullo per l'ipotesi di piccole oscillazioni, per cui:

(8) $$\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2\right) \cong \nabla(\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h})$$

Sostituendo (4), (6) e (8) nella (3) privata del termine convettivo si ha:

(9) $$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu[(\mathbf{H_0}\cdot\nabla)\mathbf{h_0} - \nabla(\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h})]$$

Poichè $\mathbf{H_0}=H_0\mathbf{e_k}$ la (9) diviene:

(10) $$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(p + \mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h}) + \mu H_0\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial z}$$

Essendo entrambi i campi vettoriali **h** e **u** solenoidali si può facilmente concludere che

(11,a) $$\nabla^2(p + \mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h}) = 0$$

Per la (11,a) il campo scalare $f=p+\mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h}$ è armonico; se ora supponiamo che il fluido si estenda fino all'infinito in tutte le possibili direzioni poiché la soluzione della (11,a) deve essere regolare in tutti i punti dello spazio, allora l'unica soluzione fisicamente possibile per la (11,a) è:

(11,b) $$p + \mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h} = \mathrm{cost}$$

Sostituendo la (11,b) in (10) si ottiene:

(11,c) $$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \mu H_0\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial z}$$

Il problema dinamico in esame è descritto anche dall'equazione di interazione del campo cinetico con il campo magnetico (si veda l'articolo dello scrivente "*Equazioni della Magnetofluidodinamica (MHD)*"), la quale, per effetto dell'ipotesi di conduttività elettrica molto elevata, diventa:

(12) $$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) = 0$$

Applicando la decomposizione del campo magnetico **H**=**H₀**+**h** la (12) diventa:

(13) $$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H_0} + \mathbf{h}) = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0} + \mathbf{u} \times \mathbf{h})$$

Il secondo termine all'interno della parentesi nella (13) è trascurabile rispetto al primo per l'ipotesi di piccole oscillazioni, per cui la (13) diviene, viste anche le proprietà di $\mathbf{H_0}$:

(14) $$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0})$$

Si effettua ora il calcolo del termine al secondo membro della (14) partendo dal fatto che: $\mathbf{u}\times\mathbf{H_0} = vH_0\mathbf{e_1} - uH_0\mathbf{e_2}$ per cui:

(15) $$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0}) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ vH_0 & -uH_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante della matrice al secondo membro della (15) si ottiene:

(16) $$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0}) = \mathbf{e_1}\frac{\partial}{\partial z}(H_0 u) + \mathbf{e_2}\frac{\partial}{\partial z}(H_0 u) + \mathbf{e_3}\left[-\frac{\partial}{\partial x}(H_0 u) - \frac{\partial}{\partial y}(H_0 v)\right]$$

Essendo $\mathbf{H_0}$ uniforme la (16) si può scrivere:

(17) $$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0}) = \mathbf{e_1}H_0\frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{e_2}H_0\frac{\partial v}{\partial z} + \mathbf{e_3}H_0\left[-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

Per l'equazione di continuità si ha che: $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$

la quale sostituita in (17) permette di scrivere:

(18) $$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0}) = \mathbf{e_1}H_0\frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{e_2}H_0\frac{\partial v}{\partial z} + \mathbf{e_3}H_0\frac{\partial w}{\partial z}$$

cioè anche:

(19) $$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H_0}) = H_0\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$$

Sostituendo la (19) in (14) si ha:

(20) $$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_0\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$$

Eliminando dalla (11,c) o dalla (20), facendo uso del teorema di Schwarz, la velocità **u** o il campo magnetico **h** si trova che tali campi vettoriali devono soddisfare la medesima equazione differenziale:

(21) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathbf{u},\mathbf{h}) = 0$$

dove: $v_a = H_0\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

è la *velocità di fase delle onde di Alfven*. Tenendo presente la meccanica delle onde, si nota subito che la (21) è formalmente l'*Equazione di D'Alembert.* Pertanto tutti i campi vettoriali (**u**, **h**) soluzione della (21) hanno un comportamento ondulatorio, e la loro espressione matematica è del tipo:

(22) $$(\mathbf{u},\mathbf{h}) = (\mathbf{u_0},\mathbf{h_0})f(z - v_0 t)$$

per cui si conclude immediatamente che sotto le ipotesi del problema posto il campo di velocità **u** ed il campo magnetico **h** rappresentano delle onde progressive monodimensionali. Dovendo poi essere $\nabla\cdot\mathbf{h}=0$ si ottiene:

(23) $$\nabla\cdot\mathbf{h} = f\nabla\cdot\mathbf{h_0} + \nabla f\cdot\mathbf{h_0}$$

Considerando inoltre che il fluido ha un'estensione infinita si avrà $\nabla\cdot\mathbf{h_0}=0$, ed essendo $(\mathbf{u_0},\mathbf{h_0}) = (\mathbf{u_0},\mathbf{h_0})(x,y)$ la (23) diventa:

(24) $$\nabla\cdot\mathbf{h} = \nabla f\cdot\mathbf{h_0} = h_{0z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

La (24), pertanto, è soddisfatta se e solo se:

(25) $$h_{0z} = 0$$

Lo stesso procedimento può essere ripetuto anche per il campo velocità ottenendo:

(26) $$u_{0z} = 0$$

La (25) e la (26) consentono di concludere che i vettori $(\mathbf{u_0},\mathbf{h_0})$, e quindi anche **u** ed **h**, sono ortogonali alla direzione di propagazione del fronte d'onda.

ONDE DI ALFVEN SMORZATE

In questo paragrafo si analizzeranno le onde magnetoidrodinamiche di piccola ampiezza in un fluido incomprimibile viscoso e a conduttività elettrica finita.
In queste ipotesi le equazioni necessarie alla soluzione del campo moto sono le equazioni del problema magnetoidrodinamico. Le equazioni differenziali di interesse, essendo sempre valida l'ipotesi delle piccole oscillazioni, vengono linearizzate secondo lo stesso procedimento del paragrafo precedente tenendo però conto dei termini dissipativi ed ottenendo:

(27) $$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mu\nabla\times(\mathbf{h}\times\mathbf{H_0}) + \nu\nabla^2\mathbf{u}$$

(28) $$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{H_0}) + \eta\nabla^2\mathbf{h}$$

dove **h** è sempre il campo magnetico variabile, **u** è la velocità del fluido, ν è la viscosità cinematica e σ è la conduttività elettrica. Prendendo, come già fatto, l'asse z nella direzione di $\mathbf{H_0}$la (27) e la (28) assumono la forma:

(29) $$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p + \mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h}) + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \frac{\mu H_0}{\rho}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial z}$$

(30) $$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = H_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} + \eta\nabla^2\mathbf{h}$$

Per la linearità dell'operatore di Laplace e di quello di derivata la (30) si può riscrivere come segue:

(31) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\nabla^2\right)\mathbf{h}=H_0\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$$

Prendendo la divergenza di entrambi i membri della (31), ed essendo solenoidali sia **h** che **u**, si deduce che se il fluido è illimitato si deve avere $p+\mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h}$=cost, per cui la (29) diventa:

(32) $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}=\nu\nabla^2\mathbf{u}+\frac{\mu H_0}{\rho}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}$$

ovvero:

(33) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\mathbf{u}=\frac{\mu H_0}{\rho}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}$$

Applicando l'operatore $(\partial/\partial t-\eta\nabla^2)$ ad entrambi i membri della (33) e dividendo membro a membro per $\mu H_0/\rho$ si ottiene:

(34) $$\frac{1}{\frac{\mu H_0}{\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\mathbf{u}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\nabla^2\right)\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}$$

Eguagliando (31) e (34) si ottiene:

(35) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\mathbf{u}=\frac{\mu H_0^2}{\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$$

Il medesimo procedimento appena sviluppato per **u** si estende con considerazioni analoghe ad **h**, ∇x**u** e ∇x**h**. Indicando allora con **A** il vettore generico fra quelli appena citati, si può scrivere:

(36) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\mathbf{A}=v_a^2\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

con $v_a=H_0\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

velocità di Alfven. Il comportamento ondulatorio descritto dalla (36) è tipicamente detto di *Diffusione-Dissipazione*. Si può facilmente notare che nelle ipotesi di viscosità cinematica nulla e di conduttività elettrica infinita si ritorna alla stessa forma matematica discussa nel precedente paragrafo.
La condizione $\mu\sigma\nu \ll 1$ equivale a porre $1/\sigma\mu \gg \nu$, ovvero che l'effetto della conduttività elettrica sia molto maggiore di quello della viscosità fluidodinamica (tale condizione è tipica dei metalli liquidi e dell'interno delle stelle),pertanto la (36) diventa:

(37) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\eta\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\right)\mathbf{A}=v_a^2\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

Si mostrerà ora che in un liquido non viscoso a conducibilità elettrica finita si possono eccitare onde smorzate di ampiezza finita. Ipotizzando che **u** = **u**(z,t), **h** = **h**(z,t) e **u**·**h** = 0 e riordinando la (37) nella forma:

(38) $$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}=\eta\nabla^2\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)+v_a^2\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

si ha: $\nabla^2\mathbf{A}=\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$

per cui la (38) diventa:

(39) $$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\eta \frac{\partial}{\partial t} + v_a^2\right)\mathbf{A}$$

Consideriamo ora delle onde armoniche monocromatiche monodimensionali di pulsazione ω scritte in notazione complessa:

(40) $$\mathbf{A} = \mathbf{A_0} \exp[j(kz - \omega t)]$$

Sostituendo la (40) nella (39) e tenendo conto che: $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = jk\mathbf{A}$ $\quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -j\omega\mathbf{A}$

si ha:

(41) $$\omega^2 = k^2\left[v_a^2 - j\eta\omega\right]$$

Considerando una perturbazione di lunghezza d'onda assegnata si ottiene la relazione di dispersione:

(42) $$\omega = -\frac{jk}{2\mu\sigma} \pm \sqrt{v_a^2 k^2 - \frac{k^4}{4\eta^2}}$$

Se è soddisfatta la condizione $\quad v_a^2 > \frac{k^2}{4\eta^2}$

allora si hanno delle onde smorzate monocromatiche monodimensionali di ampiezza finita che si propagano nella direzione dell'asse z indifferentemente in un verso o nell'altro. Ponendo $\omega=\beta+j\alpha$ con

$$\alpha = -\frac{k}{2\mu\sigma} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{v_a^2 k^2 - \frac{k^4}{4\eta^2}}$$

e sostituendo in (40) si ottiene:

(43) $$\mathbf{A} = \mathbf{A_0} \exp\left[j\left(kz - \sqrt{v_a^2 k^2 - \frac{k^4}{4\eta^2}}\,t\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{k}{2\mu\sigma}t\right)$$

essendo: $\exp\left(-\frac{k}{2\mu\sigma}t\right)$ il fattore di smorzamento.

ONDE MHD IN UN DOMINIO CILINDRICO INFINITO: IL CASO DELLE OSCILLAZIONI TORSIONALI

Il problema che ci si propone di studiare in questo paragrafo riguarda le oscillazioni torsionali che si possono instaurare in un dominio assialsimmetrico di estensione infinita nelle ipotesi di fluido incomprimibile, elettricamente conduttore, totalmente bagnante il dominio in esame ed immerso in un campo magnetico esterno uniforme e costante e diretto secondo l'asse del dominio. Nella disamina di questo problema si considererà, diversamente a quanto si fa generalmente in Magnetoidrodinamica, anche la corrente di spostamento per cui le equazioni necessarie alla soluzione del problema Elettromagnetico sono:

(44) $$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

(45) $$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

(46) $$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

(47) $$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu\mathbf{H})$$

A partire dalla (46) si ottiene:

(48) $$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) + \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\sigma\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$$

dove si è tenuto conto di (44), (45) e (47). Nel parte idrodinamica del problema, invece, in virtù della seconda ipotesi di Alfven (si veda l'articolo dello scrivente "*Equazioni della Magnetofluidodinamica (MHD)*") trascuriamo l'effetto della corrente di spostamento ottenendo:

(49) $$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu'\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{F} + \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$$

la quale può essere riscritta come segue:

(50) $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F} + \frac{\mu}{\rho}(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$$

Le relazioni (48), (50), insieme alla condizione di incomprimibilità del fluido, costituiscono un sistema di equazioni sufficienti alla soluzione del problema posto in apertura di paragrafo. Decomponendo il campo magnetico nell'usuale forma $\mathbf{H}=\mathbf{H_0}+\mathbf{h}$ ed introducendo l'ipotesi di piccole oscillazioni, la (50) diviene:

(51) $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}H_0\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} + \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h} - \phi\right) + \nu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

dove ϕ è il potenziale delle forze non elettromagnetiche; con le ipotesi precedentemente fatte, la medesima procedura porta a scrivere la (48) come:

(52) $$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - H_0\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} + \frac{1}{\sigma\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$$

Prendendo la divergenza di entrambi i membri della (51) si ottiene:

(53) $$\nabla^2\left(\frac{p}{\rho} + \mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h} - \phi\right) = 0$$

Per le ipotesi di simmetria assiale deve necessariamente essere: $\mathbf{h}=h\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{u}=u\mathbf{e}_\theta$ e $\partial/\partial\theta(\mathbf{u},\mathbf{h})=0$, per cui il sistema di equazioni vettoriali (51) e (52) si riduce ad un sistema di due equazioni scalari:

(54) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}H_0\frac{\partial h}{\partial z} - \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = 0$$

(55) $$\frac{\partial h}{\partial t} - H_0\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\sigma\mu}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}(rh)\right] + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right] = 0$$

Nella (54) e nella (55) non compare il termine associato a $\nabla(p/\rho+\mu\mathbf{H_0}\cdot\mathbf{h}-\phi)$ essendo il moto assialsimmetrico. Le equazioni $\nabla\cdot\mathbf{h}=0$ e $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ sono, inoltre, identicamente soddisfatte. Si faccia ora l'ipotesi che h ed u siano due onde sinusoidali del tipo:

(56) $$h = h_0(r)\exp[j(kz + \omega t)]$$

(57) $$v = v_0(r)\exp[j(kz + \omega t)]$$

che sostituite in (54) e (55) porgono rispettivamente:

(58) $$\nu \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}(ru_0)\right]-\left(j\omega+\nu k^2\right)v_0+j\frac{\mu}{\rho}H_0 kh_0=0$$

(59) $$\frac{1}{\sigma\mu}\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}(rh_0)\right]-\left(j\omega-\frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2+\frac{k^2}{\sigma\mu}\right)h_0+jH_0 kh_0=0$$

Le soluzioni delle (58) e (59) sono ovviamente vincolate a possedere rappresentatività fisica, per cui è necessario che le soluzioni siano regolari in corrispondenza di r=0 e che, essendo il campo magnetico esterno uniforme, la variazione di h si annulli in corrispondenza della frontiera del dominio cioè $\partial h/\partial r\,|_{r=R} = 0$
Tipiche soluzioni delle (58) e (59) soddisfacenti le condizioni di cui si è appena discusso sono:

(60) $$h_0^{(s)}(r)=A_s J_1\left(\alpha_s\frac{r}{R}\right) \quad \text{e} \quad v_0^{(s)}(r)=B_s J_1\left(\alpha_s\frac{r}{R}\right)$$

dove J_1 è la *funzione di Bessel di prima specie e di primo ordine* ed α_s è l's.mo zero di $J_1(x)$. Sostituendo in (58) e (59) le soluzioni (60) si ottiene:

(61) $$\left(\nu\frac{\alpha_s^2}{R^2}+j\omega+\nu k^2\right)B_s-j\frac{\mu}{\rho}H_0 kA_s=0$$

(62) $$\left(\frac{1}{\sigma\mu}\frac{\alpha_s^2}{R^2}+j\omega-\frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2+\frac{k^2}{\sigma\mu}\right)A_s+jH_0 kB_s=0$$

Eliminando le costanti A_s e B_s da (61) e (62) si ha:

(63) $$\left[\frac{1}{\sigma\mu}\left(\frac{\alpha_s^2}{R^2}+k^2\right)+j\omega-\frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2\right]\left[\frac{1}{\sigma\mu}\left(\frac{\alpha_s^2}{R^2}+k^2\right)+j\omega-\frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2\right]+v_a^2k^2=0$$

dove, come al solito $v_a=H_0\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

è la velocità di Alfven. Riordinando ora la (63) rispetto a k si ha:

(64) $$\frac{\nu}{\sigma\mu}k^4+\left[\frac{2\nu}{\sigma\mu}\frac{\alpha_s^2}{R^2}-\frac{\varepsilon\nu}{\sigma}\omega^2+j\omega\left(\frac{1}{\sigma\mu}+\nu\right)+v_a^2\right]k^2+\left(\frac{1}{\sigma\mu}\frac{\alpha_s^2}{R^2}-\frac{\varepsilon}{\sigma}\omega^2+j\omega\right)\left(\nu\frac{\alpha_s^2}{R^2}+j\omega\right)=0$$

Per ogni zero dalla funzione di Bessel di primo ordine e di prima specie, la (64) fornisce degli appropriati valori del numero d'onda. A ciascuno di tali valori corrisponde un modo normale di oscillazione k_s che si propaga nella direzione del campo magnetico uniforme $\mathbf{H_0}$. Essendo i numeri d'onda k_s dei numeri complessi le onde saranno smorzate. Nell'ipotesi di fluido non viscoso e nell'ipotesi di trascurabilità della corrente di spostamento (ε=0) la (64) porge:

(65) $$k_s^2=\frac{\omega^2-j\omega\dfrac{\alpha_s^2}{\sigma\mu R^2}}{v_a^2+j\dfrac{\omega}{\sigma\mu}}$$

per cui la velocità di fase del modo s.mo ($U_s=\omega/k_s$) è:

(66) $$\frac{v_a^2}{U_s^2}=\frac{1-j\dfrac{\alpha_s^2}{\sigma\mu\omega R^2}}{1+j\dfrac{\omega}{\sigma\mu v_a^2}}$$